VERDAD Y PRUEBA*

La antinomia del mentiroso, un obstáculo básico para una adecuada definición de verdad en los lenguajes naturales, reaparece en los lenguajes formalizados como un argumento constructivo que muestra que no todos los enunciados verdaderos pueden ser probados.

El tema de este artículo es viejo. Ha sido frecuentemente discutido en la lógica moderna y en la literatura filosófica, y no sería fácil contribuir a la discusión con algo original. Para muchos lectores, lo temo, ninguna de las ideas que propondré en el artículo será esencialmente nueva; sin embargo, espero que ellas puedan encontrar algún interés en el modo como el material ha sido ordenado y ensamblado.

Como el título lo indica, deseo discutir aquí dos nociones diferentes, aunque relacionadas: la noción de verdad y la noción de prueba. El artículo está dividido en tres secciones. La primera sección tiene que ver exclusivamente con la noción de verdad, la segunda idea trata primariamente con la noción de prueba y la tercera es una discusión de la relación entre estas dos nociones.

La noción de verdad

La tarea de explicar el significado del término »verdadero« será interpretada aquí, de un modo restringido. La noción de verdad aparece en diferentes contextos y hay diversas y distintas categorías de objetos a los cuales se aplica el término »verdadero«. En una discusión sicológica uno puede hablar de emociones verdaderas tanto como de creencias verdaderas; en una disertación en el campo de la estética puede analizarse la verdad intrínseca de un objeto de arte. En este artículo, sin embargo, nos interesamos solamente en lo que puede llamarse noción lógica de verdad. Más específicamente, trataremos exclusivamente con el significado del término »verdadero« cuando este término es usado para referirse a enunciados. Presumiblemente, éste era el uso original del término »verdadero« en el lenguaje humano. Los enunciados son tratados aquí como objetos lingüísticos, como ciertas cadenas de sonidos o signos escritos. (Por supuesto, no toda cadena es un

*El siguiente artículo fue traducido del original »Truth and Proof«, publicado en la revista *Scientific American*, junio 1969. La autorización para su publicación en la revista *Teoría*, fue concedida por el Prof. A. Tarski con ocasión de la charla que ofreció en el Depto. de Filosofía Univ. de Chile, Sede Norte, en enero de 1975. Derechos de reproducción reservados por el profesor Tarski.

enunciado). Además, cuando hablamos de enunciados siempre tendremos en mente, lo que en gramática se llama un enunciado asertivo y no enunciados interrogativos o imperativos.

Siempre que alguien explica el significado de cualquier término sacado del lenguaje ordinario, debería recordar que la meta y el status lógico de tal explicación puede variar de un caso a otro. Por ejemplo, la aplicación puede ser considerada como un informe del uso actual del término en cuestión y está así sujeta al cuestionamiento de si el informe es en verdad correcto. Por otra parte, una explicación puede ser de naturaleza normativa, esto es, puede ser ofrecida como una sugerencia de que el término va a ser usado de un modo determinado, sin pretender que la sugerencia se conforme con el modo como es usado realmente; tal explicación puede ser evaluada, por ejemplo, desde el punto de vista de su utilidad; pero no de su corrección. Algunas otras alternativas podrían también ser apuntadas.

La explicación que deseamos dar en el presente caso es, hasta cierto punto, de carácter mixto. Lo que será ofrecido puede ser tratado en principio como una sugerencia para un modo determinado de uso del término »verdadero«; pero el ofrecimiento estará acompañado por la creencia de que se está de acuerdo con el uso de este término que prevalece en el lenguaje cotidiano.

Nuestra comprensión de la noción de verdad parece estar de acuerdo esencialmente con varias explicaciones de esta noción que han sido dadas en la literatura filosófica. Lo que puede ser la primera explicación puede ser encontrada en la METAFISICA de Aristóteles:

> **Decir de lo que es que no es, o de lo que no es que es, es falso, mientras que decir de lo que es que es, o de lo que no es que no es, es verdadero.**

Aquí, y en la subsecuente discusión, la palabra »falso« significa lo mismo que la expresión »no verdadero« y puede ser reemplazada por esta última.

El contenido intuitivo de la formulación de Aristóteles parece bastante claro. Sin embargo, la formulación deja mucho que desear desde el punto de vista de la precisión y corrección formal. Por una parte, no es lo bastante general; se refiere sólo a los enunciados que »dicen« sobre algo »que es« o »que no es«*. En la mayoría de los casos difícilmente sería posible poner un enunciado en este molde, sin deformar el sentido del enunciado y forzar el espíritu del lenguaje. Esta es quizás una de las razones de por qué

* »que ese algo es« o »que ese algo no es«. (N. del T.).

en la filosofía moderna han sido ofrecidos varios substitutos de la formulación de Aristóteles. Como ejemplos citaremos los siguientes:

Un enunciado es verdadero si denota el estado de cosas existente.

La verdad de un enunciado consiste en su conformidad (o correspondencia) con la realidad.

Debido al uso de términos filosóficos técnicos, estas formulaciones tienen, indudablemente, un tono muy académico. Sin embargo, me parece que las nuevas formulaciones, cuando son analizadas más de cerca, resultan ser menos claras e inequívocas que la propuesta por Aristóteles.

La concepción de la verdad que encontró su expresión en la formulación aristotélica (y en formulaciones relacionadas de más reciente origen) es usualmente conocida como *la concepción clásica o semántica de la verdad.* Por semántica queremos decir la parte de la lógica que, hablando a grandes rasgos, estudia la relación entre objetos lingüísticos (tales como enunciados) y lo que es expresado por estos objetos. El carácter semántico del término »verdadero« está claramente revelado por la explicación ofrecida por Aristóteles y por algunas formulaciones que serán dadas más adelante en este artículo. Se habla algunas veces de la teoría de la verdad como correspondencia, como la teoría basada en la concepción clásica.

(En la literatura filosófica moderna algunas otras teorías y concepciones de la verdad son discutidas también, tales como la concepción pragmática y la concepción de la coherencia. Estas concepciones parecen ser de un exclusivo carácter normativo y tienen poca conexión con el uso real del término »verdadero«, ninguna de ellas ha sido formulada hasta aquí con algún grado de precisión y claridad. No serán discutidas en el presente artículo).

Intentaremos alcanzar aquí una explicación más precisa de la concepción clásica de la verdad, una que podría superar la formulación de Aristóteles al mismo tiempo que preserve sus intenciones básicas. Para este fin tendremos que recurrir a algunas técnicas de la lógica contemporánea. Deberemos también especificar el lenguaje de los enunciados que trataremos. Esto es necesario aunque sea por la única razón de que una cadena de sonidos o signos, que es un enunciado verdadero o falso; pero que al fin y al cabo es un enunciado con significado en un lenguaje, puede ser una expresión sin significado en otro. Por ahora supongamos que el lenguaje del cual nos ocuparemos es el idioma castellano.

Empezaremos con un problema simple. Consideremos un enunciado en castellano cuyo significado no produzca ninguna duda, digamos el enunciado 'la nieve es blanca'. Para abreviar denotemos este enunciado por »S«, de modo que »S« llega a ser el nombre del enunciado. Nos planteamos la pregunta: ¿qué queremos decir cuando decimos que S es verdadero o que S es falso? La respuesta a esta pregunta es simple: en el espíritu de la explicación aristotélica, decir que S es verdadero quiere decir simplemente que la nieve es blanca y decir que S es falso quiere decir que la nieve no es blanca. Eliminando el símbolo »S« llegamos a las siguientes formulaciones:

(I) »la nieve es blanca« es verdadero si y sólo si la nieve es blanca.

(I') »la nieve es blanca« es falso si y sólo si la nieve no es blanca.

Así (I) y (I') proveen explicaciones satisfactorias del significado de los términos »verdadero« y »falso« cuando estos términos se refieren al enunciado »la nieve es blanca«. Podemos considerar (I) y (I') como definiciones parciales de los términos »verdadero« y »falso«, de hecho, como definiciones de estos términos con respecto a un enunciado particular. Notemos que (I), tanto como (I'), tienen la forma prescrita para las definiciones por las reglas lógicas, esto es, la forma de la equivalencia lógica. Ella consiste en dos partes, el lado izquierdo y el lado derecho de la equivalencia combinados por la conectiva »si y sólo si«. El lado izquierdo es el *definiendum,* la frase cuyo significado es explicado por la definición, el lado derecho es el *defininiens,* la frase que provee la explicación. En el caso presente el definiendum es la siguiente expresión:

»la nieve es blanca« es verdadero

el *definiens* tiene la forma

la nieve es blanca.

Puede parecer a primera vista que (I), cuando la consideramos como una definición, exhibe un defecto esencial· considerado en la lógica tradicional como un círculo vicioso. La razón es que algunas palabras; por ejemplo, »nieve« aparecen en el *definiens* y en el *definiendum.* Realmente, sin embargo, estas apariciones tienen un carácter enteramente diferentes. La palabra »nieve« es una parte sintáctica, u orgánica, del *definiens;* de hecho el *definiens* es un enunciado y la palabra »nieve« es su sujeto. El *definiendum* es también un enunciado, expresa el hecho de que el *definiens* es un enunciado verdadero. Su sujeto es un nombre del *definiens* formado al poner el *definiens* entre comillas. (Cuando decimos algo de un objeto, siempre usamos un nombre de este objeto y no el objeto mismo, aun cuando tratemos con objetos lingüísticos). Por muchas razones una expresión encerrada entre comillas debe ser tratada gramaticalmente como una palabra singular que no tenga partes sintácticas. Por lo tanto, la palabra »nieve« que indudablemente aparece en el *definiendum* como una parte, no aparece ahí como una parte sintáctica. Un lógico medieval podría decir que »nieve« aparece en el *definiens in suppositione formalis* y en el *definiendum in suppositione materialis.* Sin embargo, las palabras que no son partes sintácticas del *definiendum* no pueden crear un círculo vicioso, y el peligro desaparece.

Los comentarios anteriores tocan algunas cuestiones que son más bien sutiles y no muy simples desde el punto de vista lógico. En lugar de construir sobre ellas, indicaré otra manera por la cual cualquier temor de un círculo vicioso puede ser disipado. Al formular (I) hemos aplicado un método común de formar un nombre de un enunciado, o de cualquier otra expresión, que consiste en poner la expresión entre comillas. El método tiene muchas virtudes, pero es también la fuente de las dificultades discutidas arriba. Para eliminar estas dificultades tratemos otro método de formar nombres de expresiones, de hecho es un método que puede ser caracterizado como una descripción letra por letra de una expresión. Usando este método, obtenemos en lugar de (I) la siguiente larga formulación:

(2) la cadena de cuatro palabras, la primera de las cuales es la cadena de las letras ele, a, la segunda es la cadena de las letras ene, i, e, ve, e, la tercera es la cadena de las letras e, ese, y la cuarta es la cadena de las letras be, ele, a, ene, ce, a es un enunciado verdadero si y sólo si la nieve es blanca.

La formulación (2) no difiere de (I) en su significado; (I) puede ser simplemente considerado como una forma abreviada de (2). La nueva formulación es ciertamente mucho menos perspicaz que la primera; pero tiene la ventaja de que no crea la apariencia de un círculo vicioso.

Definiciones parciales de verdad, análogas a (I) y (2) pueden ser construidas también para otros enunciados. Cada una de estas definiciones tiene la forma:

(3) »p« **es verdadero si y sólo si p,**

donde »p« va a ser reemplazada en ambos lados de (3) por el enunciado para el cual la definición es construida. Especial atención debería ponerse, sin embargo, a aquellas situaciones en las cuales sucede que el enunciado puesto en lugar de »p« contiene la palabra »verdadero« como parte sintáctica. La equivalencia correspondiente (3) no puede entonces ser considerada como una definición parcial de verdad, puesto que cuando la tratamos como tal, obviamente exhibiría un círculo vicioso. Aun en este caso, sin embargo, (3) es un enunciado con significado y es realmente un enunciado verdadero desde el punto de vista de la concepción clásica de la verdad. Para ilustrar, imaginemos que en un comentario de un libro uno encuentra el siguiente enunciado:

(4) **No todo enunciado en este libro es verdadero.**

Aplicando a (4) el criterio aristotélico vemos que el enunciado (4) es verdadero si, en efecto, no todo enunciado en el libro en cuestión es verdadero, y que, de otro modo, (4) es falso; en otras palabras, podemos afirmar la equivalencia obtenida de (3) tomando a (4) por »p«. Por supuesto, esta equivalencia afirma meramente las condiciones bajo las cuales el enunciado (4) es verdadero o no es verdadero; pero por sí misma la equivalencia no nos capacita para decidir cuál es realmente el caso. Para verificar el juicio expresado en (4), uno tendría que leer atentamente el libro comentado y analizar la verdad de los enunciados contenidos en él.

A la luz de la consideración precedente podemos ahora formular nuestro principal problema. Estipulamos que el uso del término »verdadero«, en referencia a enunciados castellanos, solamente se conforma con el criterio clásico de verdad si nos capacita para afirmar toda equivalencia de la forma (3) en la cual »p« es reemplazada en ambos lados por un enunciado arbitrario castellano. Si esta condición es satisfecha, diremos simplemente que el uso del término »verdadero« es adecuado. Así, nuestro principal problema es: ¿podemos establecer un uso adecuado del término »verdadero«, para enunciados castellanos, y si es así, entonces, ¿por qué métodos? Por supuesto, podemos plantear una pregunta análoga para enunciados en cualquier otro lenguaje.

El problema será solucionado completamente si logramos construir una definición general de verdad que será adecuada en el sentido de que implica como consecuencias lógicas todas las equivalencias de la forma (3). Si tal definición es aceptada por gente de habla castellana, establecerá obviamente un uso adecuado del término »verdadero«.

Bajo ciertos supuestos especiales la construcción de una definición de verdad, es fácil. Supongamos, en efecto, que estamos interesados, no en la totalidad del lenguaje castellano, sino sólo en un fragmento de él, y que deseamos définir el término »verdadero« exclusivamente con referencia a los enunciados de un lenguaje fragmentario, nos referiremos a este lenguaje fragmentario, como el lenguaje L. Supongamos también que L está provisto con reglas sintácticas precisas que nos capacitan en cada caso particular, para distinguir un enunciado de una expresión que no es un enunciado; y que el número de todos los enunciados en el lenguaje L es finito (aunque posiblemente muy grande). Supongamos finalmente que la palabra »verdadero« no aparece en L y que el significado de todas las palabras de L es suficientemente claro, de tal modo que no haya objeción para usarlas en la definición de verdad. Bajo estos supuestos procedamos como sigue. Primero, preparemos una lista completa de todos los enunciados de L, supongamos por ejemplo, que hay exactamente 1.000 enunciados en L, y pongámonos de acuerdo para usar los símbolos »S_1«, »S_2«, ... »S_{1000}«, como abreviaciones para los enunciados consecutivos de la lista. En seguida, para cada uno de los enunciados »S_1«, »S_2«, ... »S_{1000}«, construyamos una definición parcial de verdad substituyendo sucesivamente estos enunciados por »p« en ambos lados del esquema (3). Finalmente, formemos la conjunción lógica de todas estas definiciones parciales; en otras palabras, combinémoslas en una afirmación poniendo la conectiva »y« entre cualesquiera dos definiciones parciales consecutivas. La única cosa que queda por hacer es dar una forma diferente, pero lógicamente equivalente, a la conjunción que resulta, de modo que satisfaga los requisitos formales impuestos a las definiciones por las reglas de la lógica:

(5) **Para todo enunciado (en el lenguaje L), x es verdadero**
si y sólo si, o bien
S_1, y x es idéntica a »S_1«,
o bien
S_2, y x es idéntica a »S_2«,
....
o finalmente
S_{1000}, y x es idéntica a »S_{1000}«.

Hemos llegado así a una afirmación que puede en verdad ser aceptada como la deseada definición general de verdad; es formalmente correcta y es adecuada en el sentido de que implica todas las equivalencias de la forma (3) en la cual »p« ha sido reemplazada por cualquier enunciado del lenguaje L. Notemos de paso que (5) es un enunciado castellano; pero obviamente no del lenguaje L. Como (5) contiene todos los enunciados de L como partes propias no puede coincidir con alguna de ellas. Mayores consideraciones arrojarán luz sobre este punto.

Por razones obvias, el procedimiento recién esbozado no puede ser seguido si nos interesamos en la totalidad del idioma castellano y no meramente en un fragmento de él. Cuando tratamos de preparar una lista completa de los enunciados castellanos, nos encontramos desde la partida con la dificultad de que las reglas de la gramática castellana no determinan de un modo preciso la forma de las expresiones (cadenas de palabras) que deberían ser consideradas como enunciados; una expresión particular, digamos una exclamación, puede funcionar como un enunciado en un contexto dado, mientras que una expresión de la misma forma no funcionará así en algún otro contexto. Además el conjunto de todos los enunciados castellanos es, potencialmente al menos, infinito. Aunque es ciertamente verdad que sólo un número finito de enunciados han sido formulados, en el hablar y escribir, por los seres humanos hasta el momento presente; probablemente nadie estaría de acuerdo en que la lista de todos estos enunciados comprende todos los enunciados castellanos. Por el contrario, parece factible que al ver tal lista, cada uno de nosotros podría fácilmente producir un enunciado castellano que no esté en la lista. Finalmente, el hecho de que la palabra »verdadero« aparezca en castellano, impide por sí mismo una aplicación del procedimiento previamente descrito.

De estas observaciones no se sigue que la deseada definición de verdad para enunciados arbitrarios en castellano no pueda ser obtenida de otro modo, posiblemente usando una idea diferente. Hay, sin embargo, una razón más seria y fundamental que parece excluir esta posibilidad. Aún más, la mera suposición de que haya un método, cualquiera que sea, que nos asegure un uso adecuado del término »verdadero« (en su referencia a enunciados arbitrarios castellanos) parece llevar a una contradicción. El argumento más simple que produce tal contradicción es conocido como la *antinomia del mentiroso;* será desarrollado en las pocas líneas que siguen:

Consideremos el siguiente enunciado:

(6) **El enunciado enmarcado sobre la página 63 del número 3 de la revista *Teoría* del primer trimestre de 1975 es falso.**

Pongámonos de acuerdo en usar »s« como una abreviación de este enunciado. Mirando la fecha de esta revista y el número de esta página, fácilmente verificamos que »s« es, justamente el único enunciado enmarcado en la revista *Teoría*. Por lo tanto, se sigue en particular que

(7) **»s« es falso y si y sólo si el enunciado enmarcado en el númeso 3 de la revista *Teoría* es falso.**

Por otro lado, »s« es indudablemente un enunciado castellano. Por lo tanto, suponiendo que nuestro uso del término »verdadero« es adecuado, podemos afirmar la equivalencia (3) en la cual »p« es reemplazada por »s«

(8) **»s« es verdadero si y sólo si *s*.**

Ahora, recordemos que »s« representa todo el enunciado (6). Por lo tanto podemos reemplazar »s« por (6) al lado derecho de (8) y obtenemos

(9) **»s« es verdadero si y sólo si el enunciado enmarcado sobre la página 63 del número 3 de la revista *Teoría* es falso.**

Ahora, comparando (7) y (9), concluimos

(10) **»s« es falso si y sólo si »s« es verdadero.**

Esto nos lleva a una obvia contradicción: »s« resulta ser ambas cosas, verdadero y falso. De este modo, nos vemos enfrentados con una antinomia. Esta formulación de la antinomia del mentiroso es debida al lógico polaco Jan Lukasiewicz.

Algunas formulaciones más complejas de la antinomia son también conocidas. Imaginemos, por ejemplo, un libro de 100 páginas, con sólo un enunciado impreso en cada página.

Sobre la página 1 leemos:

El enunciado impreso en la página 2 de este libro es verdadero.

Sobre la página 2 leemos:

El enunciado impreso en la página 3 de este libro es verdadero.

Y así continuamos hasta la página 99. Sin embargo, sobre la página 100, la última página del libro, encontramos:

El enunciado impreso en la página 1 de este libro es falso.

Supongamos que el enunciado impreso en la página 1, es en verdad falso. Por medio de un argumento que no es difícil, pero que es muy largo y requiere hojear el libro entero, concluimos que nuestra suposición es errónea. En consecuencia supondremos ahora, que el enunciado impreso en la página 1 es verdadero y, por un argumento, que es tan fácil y largo como el original, nos convencemos que la nueva suposición es también errónea. Así, otra vez nos confrontamos con una antinomia.

Resulta ser una cosa fácil componer muchos otros »libros de antinomias« que son variantes del que justamente describimos. Cada uno de ellos tiene 100 páginas. Cada página contiene solamente un enunciado, y de hecho un enunciado de la forma:

El enunciado impreso en la página 00 de este libro es XX.

En cada caso particular »XX« es reemplazado por una de las palabras »verdadero« o »falso«, mientras que »00« es reemplazado por uno de los numerales »1«, »2«, ... »100«; el mismo numeral puede aparecer sobre muchas páginas. No toda variante de este original libro, compuesto de acuerdo a estas reglas, cae realmente en una antinomia. El lector que sea aficionado a los puzzles lógicos difícilmente encontrará dificultad en describir aquellas variantes que están en esa circunstancia. La siguiente advertencia puede ser útil en este contexto. Imaginemos que en alguna parte del libro, digamos en la página 1, se dice que el enunciado sobre la página 3 es verdadero, mientras que en otra parte, digamos en la página 2, se sostiene que el mismo enunciado es falso. De esta información no se sigue en absoluto que nuestro libro es »antinomial«, sólo podemos sacar la conclusión de que o bien el enunciado sobre la página 1 o bien el enunciado sobre la página 2 debe ser falso. Una antinomia surge, sin embargo, dondequiera que podamos mostrar que uno de los enunciados de este libro es, ambas cosas, verdadero y falso, independiente de cualesquiera suposiciones concernientes a la verdad o falsedad de las oraciones restantes.

La antinomia del mentiroso es de muy antiguo origen. Usualmente es atribuida al lógico griego Eubúlides de Mileto: atormentó a muchos lógicos antiguos y causó la prematura muerte de por lo menos uno de ellos, Filites de Cos. Varias otras antinomias y paradojas fueron encontradas en la antigüedad, en la Edad Media y en los tiempos Modernos. Aunque muchas de ellas se han ahora olvidado completamente, la antinomia del mentiroso es aún analizada y discutida en escritos contemporáneos. Junto con algunas recientes antinomias descubiertas alrededor de principios de siglo (en particular, la antinomia de Russell) ha tenido un gran impacto sobre el desarrollo de la lógica moderna.

Dos caminos diametralmente opuestos ante las antinomias pueden encontrarse en la literatura de este tema. Una tendencia es olvidarlas, tratarlas como sofismas, como bromas que no son serias sino maliciosas y que aspiran principalmente a mostrar la habilidad del que las formula. La tendencia opuesta es característica de ciertos pensadores del siglo XIX y está aún representada, o era así hace un corto tiempo, en ciertas partes del mundo. De acuerdo con esta posición las antinomias constituyen un elemento esencial del pensamiento humano; ellas deben aparecer muchas veces en la actividad intelectual y su presencia es la básica fuente real de progreso. Como sucede a menudo, es probable que la verdad esté entremedio. Personalmente, como lógico, no podría reconciliarme con las antinomias como un elemento permanente de nuestro sistema de conocimiento. Sin embargo, no estoy de ninguna manera inclinado a tratar las antinomias ligeramente. La aparición de una antinomia es para mí un síntoma de enfermedad. Partiendo con premisas que parecen intuitivamente obvias, usando formas de razonamiento que parecen intuitivamente ciertas, una antinomia nos lleva a un sin sentido, una contradicción. Dondequiera que esto sucede, tenemos que someter nuestros modos de pensamiento a una completa revisión, rechazar algunas premisas en las que creíamos o rectificar algunas formas de argumento que usábamos. Hacemos esto con la esperanza no sólo de que la vieja antinomia será alejada sino también de que ninguna nueva aparecerá. Para este fin, verificamos nuestro sistema reformado de pensamiento por todos los medios posibles y, primero de todo, trataremos de reconstruir la vieja antinomia en el nuevo marco. Este examen es una actividad muy importante en el dominio del pensamiento especulativo, análogo al desarrollo de experimentos cruciales en ciencia empírica.

Desde este punto de vista consideremos ahora la antinomia del mentiroso. La antinomia involucra la noción de verdad en referencia a enunciados castellanos arbitrarios; podría ser fácilmente reformulada y así ser aplicada a otros lenguajes naturales. Estamos confrontados con un problema serio: ¿cómo podemos evitar las contradicciones inducidas por esta antinomia? Una solución radical del problema que puede inmediatamente ocurrírsenos, sería simplemente alejar la palabra »verdadero« del vocabulario castellano o, por lo menos, abstraer de usarla en cualquiera discusión seria.

Aquellas personas a las cuales tal amputación del castellano parece altamente insatisfactorio o ilegítimo pueden estar más inclinadas a aceptar una solución algo más transigente que consiste en adoptar lo que podría ser llamado (siguiendo al filósofo polaco contemporáneo Tadeuwz Kotarbinsky) »la aproximación nihilista a la teoría de la verdad«. De acuerdo a esta perspectiva, la palabra »verdadero« no tiene un significado independiente sino que puede ser usada como un componente de dos expresiones con significados »es verdad que« y »no es verdad que«. Estas expresiones son, por lo tanto, tratadas como si fueran simples palabras sin partes orgánicas. El significado atribuido a ellas es tal que pueden ser inmediatamente eliminadas de cualquier enunciado en el que aparecen. Por ejemplo, en vez de decir:

Es verdad que todos los gatos son negros

podemos decir

todos los gatos son negros

y en lugar de

no es verdad que todos los gatos son negros

podemos decir

no todos los gatos son negros.

En otros contextos la palabra »verdadero« no tiene significado. En particular, no puede ser usada como un predicado real calificando nombres de enunciados. Empleando la terminología de la lógica medieval, podemos decir que la palabra »verdadero« puede ser usada sincategoremáticamente en algunas situaciones especiales, pero no puede nunca ser usada categoremáticamente.

Para darnos cuenta de las implicaciones de esta posición, consideremos el enunciado que fue el punto de partida de la antinomia del mentiroso; esto es el enunciado enmarcado en la página 63 de esta revista. Desde el punto de vista »nihilista« no es un enunciado con significado, y la antinomia simplemente se desvanece. Desgraciadamente, muchos usos de la palabra »verdadero« que de otro modo parecen bastante legítimos y razonables son similarmente afectados por esta manera de ver las cosas. Imaginemos, por ejemplo, que un cierto término que aparece repetidamente en los trabajos de un antiguo matemático, admite varias interpretaciones. Un historiador de la ciencia que estudia los trabajos llega a la conclusión de que bajo una de estas interpretaciones todos los teoremas propuestos por el matemático resultan ser verdaderos; esto lo lleva naturalmente a conjeturar que lo mismo se aplicará a cualquier trabajo de ese matemático que no es conocido en el presente; pero que puede ser conocido en el futuro. Si, sin embargo, el historiador de la ciencia, forma parte de la tendencia »nihilista« de la concepción de la verdad, él carece de la posibilidad de expresar su conjetura en palabras. Uno podría decir que esta concepción »nihilista« acerca de la verdad rinde tributo a algunas formas populares del habla humana, mientras que realmente saca la noción de verdad del almacenaje conceptual de la mente humana.

Buscaremos, por lo tanto, otra salida para nuestra dificultad. Trataremos de encontrar una solución que conserve el concepto clásico de verdad esencialmente intacto, la aplicabilidad de la noción, de verdad tendrá que experimentar algunas restricciones, pero la noción permanecerá disponible por lo menos para los propósitos del discurso académico.

Para este fin tenemos que analizar aquellos rasgos del lenguaje común que son la fuente real de la antinomia del mentiroso. Cuando hacemos este análisis, notamos de inmediato un rasgo sobresaliente de este lenguaje: su carácter omnicomprensivo y universal. El lenguaje común es universal y así se pretende que sea. Se le supone capaz de proveer facilidades adecuadas para expresar absolutamente todo lo que puede ser expresado en algún lenguaje, cualquiera que sea; está continuamente expandiéndose para satisfacer este requerimiento. En particular, es semánticamente universal, en el siguiente sentido. Junto con los objetos lingüísticos, tales como enunciados o términos, que son componentes de este lenguaje, se incluyen también nombres de estos objetos (como sabemos, los nombres de las expresiones pueden ser obtenidas poniendo las expresiones entre comillas); además, el lenguaje contiene términos semánticos, tales como »verdad«, »nombre«, »designación«, que directamente o indirectamente se refieren a la relación entre objetos lingüísticos y lo que es expresado por ellos. En consecuencia, para todo enunciado formulado en el lenguaje común podemos formar en el mismo lenguaje otro enunciado que dice que el primer enunciado es verdadero o que es falso. Usando un »truco« adicional podemos incluso construir en el lenguaje lo que algunas veces se llama un enunciado autorreferente, esto es, un enunciado S que afirma el hecho de que S mismo es verdadero o que es falso. En caso de que S afirme su propia falsedad podemos mostrar por medio de un simple argumento que S es ambas cosas, verdadero y falso, y estamos confrontados otra vez con la antinomia del mentiroso.

No hay, sin embargo, necesidad de usar lenguajes universales en todas las situaciones posibles. En particular, tales lenguajes no se necesitan para los propósitos de la ciencia (y por ciencia quiero decir aquí la totalidad del dominio de la investigación intelectual). En una rama particular de la ciencia, digamos en Química, uno estudia ciertos objetos especiales, tales como elemento, moléculas, y así sucesivamente; pero no, por ejemplo, objetos lingüísticos tales como enunciados o términos. El lenguaje que está bien adaptado a este estudio es un lenguaje restringido con un vocabulario limitado; debe contener nombres de objetos químicos, términos tales como »elemento« y »molécula«; pero no nombres de objetos lingüísticos; por lo tanto, no tiene que ser semánticamente universal. Lo mismo se aplica a la mayoría de las otras ramas de la ciencia. La situación llega a ser algo confusa cuando nos volvemos a la lingüística. Esta es una ciencia en la cual estudiamos lenguajes; así, el lenguaje de la lingüística debe estar ciertamente provisto con nombres de objeto lingüísticos. Sin embargo, no tenemos que identificar el lenguaje de la lingüística con el lenguaje universal o cualesquiera de los lenguajes que son objetos del estudio lingüístico; y no estamos obligados a suponer uno y el mismo lenguaje para todos los estudios. El lenguaje de la lingüística tiene que contener los nombres de los componentes lingüísticos de los lenguajes que se estudian; pero no los nombres de sus propios componentes; así, de nuevo, no tiene que ser semánticamente universal. Lo mismo se aplica al lenguaje de la lógica, o más bien de esa parte de la lógica conocida como metalógica y metamatemática; aquí, otra vez, tenemos que tratar con ciertos lenguajes, principalmente con lenguajes de teorías lógicas y matemáticas (aunque estudiamos estos lenguajes desde un punto de vista diferente que en el caso de la lingüística).

La pregunta que ahora surge es si la noción de verdad puede ser definida precisamente, y así poder establecer un uso adecuado y consistente de esta noción por lo menos para los lenguajes semánticamente restringidos del discurso científico. Bajo ciertas condiciones la respuesta a esta pregunta resulta ser afirmativa. Las principales condiciones impuestas a los lenguajes son que todo su vocabulario debería ser utilizable y sus reglas sintácticas, concernientes a la formación de enunciados y otras expresiones con significado a partir de las palabras enumeradas en el vocabulario, deberían ser formuladas precisamente. Además las reglas sintácticas deberían ser puramente formales, esto es, deberían referirse exclusivamente a la forma (figura) de las expresiones; la función y el significado de una expresión debería depender exclusivamente de su forma. En particular, mirando una expresión. Uno debería ser capaz en cada caso de decidir si la expresión es o no un enunciado. Nunca debería suceder que una expresión funcione como un enunciado en un lugar mientras que una expresión de la misma forma no funcione así en algún otro lugar, o que un enunciado pueda ser afirmado en un contexto mientras que un enunciado de la misma forma pueda ser negado en otro. (Por lo tanto, se sigue en particular, que los pronombres demostrativos y adverbios tales como »éste« y »aquí« no deberían aparecer en el vocabulario del lenguaje). Los lenguajes que satisfacen estas condiciones se conocen como lenguajes formalizados. Cuando estudiamos un lenguaje formalizado no hay necesidad de distinguir entre expresiones de la misma forma que han sido escritas o expresadas en diferentes lugares; uno a menudo habla de ellas como si fueran una y la misma expresión. El lector puede haber notado que algunas veces usamos este modo de hablar aun cuando estudiamos un lenguaje natural; esto es, uno que no es formalizado; lo hacemos así por motivos de simplicidad y sólo en aquellos casos en que no parece haber peligro de confusión.

Los lenguajes formalizados son completamente adecuados para la presentación de teorías lógicas y matemáticas; no veo ninguna razón esencial de por qué ellos no pueden ser adaptados para el uso de otras disciplinas científicas, y en particular, para el desarrollo de las partes teóricas de las ciencias empíricas. Me gustaría enfatizar que, cuando uso el término »lenguajes formalizados« no me refiero exclusivamente a los sistemas lingüísticos que son formulados enteramente en símbolos y no tengo en mente ninguna cosa esencialmente opuesta a los lenguajes naturales. Por el contrario, los únicos lenguajes formalizados que parecen ser de real interés son aquellos que son fragmentos de los lenguajes naturales (fragmentos provistos con vocabularios completos y reglas sintácticas precisas) o aquellos que pueden, por lo menos, ser adecuadamente traducidos a lenguajes naturales.

Hay algunas otras condiciones de las cuales depende la realización de nuestro programa. Debiéramos hacer una estricta distinción entre el lenguaje que es el objeto de nuestra discusión y para el cual en particular intentamos construir la definición de verdad, y el lenguaje en el cual la definición va a ser formulada y sus implicaciones van a ser estudiadas. El último es conocido como el metalenguaje y el primero como el lenguaje-objeto. El metalenguaje debe ser suficientemente rico; en particular, debe contener al lenguaje objeto como parte. En efecto, de acuerdo a nuestra estipulación, una adecuada definición de verdad implicará como consecuencias todas las definiciones parciales de esta noción, esto es, todas las equivalencias de la forma (3):

»p« es verdadero si y sólo si p,

donde »p« va a ser reemplazado (en ambos lados de la equivalencia) por un enunciado arbitrario del lenguaje-objeto. Puesto que todas estas consecuencias son formuladas en el metalenguaje, concluiremos que todo enunciado del lenguaje-objeto debe también ser un enunciado del metalenguaje. Además, el metalenguaje debe contener nombres de enunciados (y otras expresiones) del lenguaje-objeto, puesto que estos nombres aparecen en los lados izquierdos de todas las equivalencias de arriba. Debe también contener algunos términos que se necesitan para el estudio del lenguaje-objeto; en efecto, términos que denotan ciertos conjuntos especiales de expresiones, relaciones sobre expresiones y operaciones sobre expresiones; por ejemplo, debemos ser capaces de hablar del conjunto de todos los enunciados o de la operación de yuxtaposición, por medio de la cual, poniendo dos expresiones dadas una inmediatamente después de la otra, formamos una nueva expresión. Finalmente, definiendo verdad, mostramos que los términos semánticos (que expresan relaciones entre enunciados de este lenguaje-objeto y objetos a los cuales se refieren estos enunciados) pueden ser introducidos en el metalenguaje por medio de definiciones. Por lo tanto, concluimos que el metalenguaje que provea suficientes medios para definir verdad debe ser esencialmente más rico que el lenguaje-objeto; y no puede coincidir o ser traducido en el último, puesto que de otro modo ambos lenguajes resultarían ser semánticamente universales, y la antinomia del mentiroso podría ser reconstruida en ambos. Volveremos a esta cuestión en la última sección de este artículo.

Si todas las condiciones de arriba son satisfechas, la construcción de la definición de verdad deseada no presenta dificultades esenciales. Técnicamente, sin embargo, es demasiado compleja para ser explicada aquí en detalle. Para cualquier enunciado dado del lenguaje-objeto uno puede fácilmente formular la correspondiente definición parcial de la forma (3). Puesto que, sin embargo, el conjunto de todos los enunciados del lenguaje-objeto es por regla infinito, mientras que todo enunciado del metalenguaje es una cadena finita de signos, no podemos llegar a una definición general simplemente formando la conjunción lógica de las definiciones parciales. Sin embargo, lo que eventualmente obtenemos es en algún sentido intuitivo equivalente a la imaginaria conjunción infinita. Muy a grandes rasgos, procedemos como sigue. Primero, consideramos los enunciados más simples, que no incluyan otros enunciados como partes: para estos enunciados más simples logramos definir verdad directamente (usando la misma idea que lleva las definiciones parciales). Entonces, haciendo uso de las reglas sintácticas que conciernen a la formación de enunciados más complicados a partir de otros más simples, extendemos la definición a enunciados compuestos arbitrarios; aplicamos aquí el método conocido en matemáticas como definición por recursión. (Esto es meramente una tosca aproximación del procedimiento real. Por algunas razones técnicas el método de recursión de hecho se aplica para definir no la noción de verdad sino la noción semántica relacionada de satisfacción. La verdad, entonces, es fácilmente definida en términos de satisfacción).

Sobre la base de la definición así construida podemos desarrollar la teoría completa de la verdad. En particular, podemos derivar de ella, además de todas las derivaciones de la forma (3), algunas consecuencias de naturaleza general, tales como las famosas leyes de contradicción y tercero excluido. Por la primera de estas leyes ningún par de enunciados, uno de los cuales es la negación del otro, puede ser tal que ambos sean verdaderos; por la segunda ley, no puede ser que ambos sean falsos.

La noción de prueba

Cualquiera sea la cosa que se logre construyendo una adecuada definición de verdad para un lenguaje científico, un hecho parece ser cierto: la definición no lleva consigo un criterio manejable para decidir si enunciados particulares en este lenguaje son verdaderos o falsos (y de hecho no está diseñado en absoluto para este propósito). Consideremos, por ejemplo, un enunciado en el lenguaje de la geometría elemental del colegio secundario, digamos »las tres bisectrices de todo triángulo se encuentran en un punto«. Si estamos interesados en la cuestión de si el enunciado es verdadero y nos volvemos a la definición de verdad en busca de una respuesta, nos llevaremos un chasco. La única información que obtenemos es que el enunciado es verdadero si las tres bisectrices de todo triángulo siempre se encuentran en un punto y es falso si no siempre se encuentran; pero sólo una investigación geométrica puede ayudarnos a decidir cuál es el caso. Observaciones análogas se aplican a enunciados del dominio de cualquier ciencia particular: decidir si tal o cual enunciado es verdadero o no, es tarea de la ciencia misma, y no de la lógica, o de la teoría de la verdad.

Algunos filósofos y metodólogos de la ciencia están inclinados a rechazar toda definición que no provea un criterio para decidir si cualquier objeto particular dado cae bajo la noción definida o no. En la metodología de las ciencias empíricas tal tendencia es representada por el operacionalismo. Los filósofos de las matemáticas que pertenecen a la escuela constructivista parecen exhibir una tendencia similar. En ambos casos, sin embargo, la gente que sostiene esta opinión parece estar en una gran minoría. Un intento consistente para desarrollar el programa prácticamente (esto es, para desarrollar una ciencia sin usar definiciones indeseadas) nunca se ha hecho. Parece claro que bajo este programa mucho de las matemáticas contemporáneas desaparecerían y las partes teóricas de la Física, Química, Biología y otras ciencias empíricas serían severamente mutiladas. Las definiciones de nociones como átomo o gen, así como la mayoría de las definiciones en matemáticas no lleva consigo ningún criterio para decidir si un objeto cae o no bajo el término que ha sido definido.

Puesto que la definición de verdad no nos provee con ningún criterio de esta índole y como al mismo tiempo la búsqueda de la verdad es correctamente considerada la esencia de las actividades científicas, surge como un importante problema encontrar por lo menos criterios parciales de verdad y desarrollar procedimientos que nos capaciten para afirmar o negar la verdad (o, por lo menos, la probabilidad de verdad) de tantos enunciados como sea posible. Tales procedimientos, son de hecho, conocidos: algunos de ellos son exclusivamente usados en la ciencia empírica y algunos principalmente en la ciencia deductiva. La noción de prueba —la segunda noción que será discutida en este artículo— se refiere justamente a un procedimiento de afirmar la verdad de los enunciados que es empleado principalmente en ciencia deductiva. Este procedimiento es un elemento esencial de lo que es conocido como el método axiomático, el único método usado ahora para desarrollar las disciplinas matemáticas.

El método axiomático y la noción de prueba dentro de este marco son producto de un largo desarrollo histórico. Algún tosco conocimiento de este desarrollo es probablemente esencial para la comprensión de la noción contemporánea de prueba.

Originalmente una disciplina matemática era un agregado de enunciados que concernían a una cierta clase de objetos o fenómenos, eran formulados por medio de un conjunto fijo de términos, y aceptados como verdaderos. Este agregado de enunciados carecía de orden estructural. Un enunciado era aceptado como verdadero ya sea porque parecía intuitivamente evidente, o bien porque era probado sobre la base de algunos enunciados intuitivamente evidentes y así era mostrado, por medio de un argumento intuitivamente cierto que era consecuencia de estos otros enunciados. El criterio de evidencia intuitiva (y certeza intuitiva de argumentos) era aplicado sin ninguna restricción; todo enunciado reconocido como verdadero por medio de este criterio era automáticamente incluido en la disciplina. Esta descripción parece apta, por ejemplo, para la ciencia de la Geometría como fue conocida por los antiguos egipcios y griegos en su temprano estado pre-euclidiano.

Bastante pronto se dieron cuenta, sin embargo, que el criterio de evidencia intuitiva está lejos de ser infalible, no tiene un carácter objetivo y, a menudo, lleva a serios errores. Todo el desarrollo subsecuente del método axiomático puede ser visto como una expresión de la tendencia a restringir el recurso a la evidencia intuitiva.

Esta tendencia se reveló primero en el esfuerzo por probar tantos enunciados como sean posibles, y por lo tanto, para restringir tanto como sea posible el número de enunciados aceptados como verdaderos meramente sobre la base de la evidencia intuitiva. El ideal, desde este punto de vista sería probar todo enunciado que sea aceptado como verdadero. Por razones obvias este ideal no puede ser realizado. En verdad, probamos cada enunciado sobre la base de otros enunciados, probamos estos otros enunciados sobre la base de algunos otros enunciados y así sucesivamente: si hemos de evitar un círculo vicioso y un regreso infinito, el procedimiento debe ser discontinuado en alguna parte. Como un compromiso entre el ideal inalcanzable y las posibilidades realizables surgieron dos principios y fueron subsecuentemente aplicados en la construcción de disciplinas matemáticas. Por el primero de estos principios toda disciplina empieza con una lista de un pequeño número de enunciados, llamados axiomas o enunciados primitivos, que parecen ser intuitivamente evidentes y que son reconocidos como verdaderos sin más justificación. De acuerdo al segundo principio, ningún otro enunciado es aceptado en la disciplina como verdadero a menos que seamos capaces de probarlo con la exclusiva ayuda de los axiomas y de aquellos enunciados que fueron previamente probados. Todos los enunciados que pueden ser reconocidos como verdaderos, por virtud de estos dos principios son llamados teoremas o enunciados demostrables en la disciplina dada. Dos principios análogos tienen que ver con el uso de términos en la construcción de la disciplina. Por el primero de ellos, confeccionamos al principio una lista de unos pocos términos, llamados términos indefinidos o primitivos, que parecen ser directamente comprensibles y que decidimos usar (al formular y probar teoremas) sin explicar su significado; por el segundo principio, nos ponemos de acuerdo en no usar ningún término más sin que seamos capaces de explicar su significado, definiéndole con ayuda de los términos indefinidos y los términos previamente definidos. Estos cuatro principios son las piedras angulares del método axiomático; las teorías desarrolladas de acuerdo a estos principios son llamadas teorías axiomáticas.

Como es bien sabido, el método axiomático fue aplicado al desarrollo de la Geometría en los Elementos de Euclides cerca del año 300 a. C. A continuación fue usado por 2.000 años con prácticamente ningún cambio en sus principios fundamentales (los cuales por lo demás, nó fueron ni siquiera explícitamente formulados por un largo período de tiempo) ni en la perspectiva general de la materia. Sinembargo, en el siglo XIX y XX el concepto de método axiomático sufrió una profunda evolución. Aquellos rasgos de la evolución que tienen que ver con la noción de prueba son particularmente significativos para nuestro estudio.

Hasta los últimos años del siglo XIX la noción de prueba tenía principalmente un carácter sicológico. Una prueba era una actividad intelectual que aspiraba a convencer a los demás y a uno mismo, de la verdad de un enunciado considerado; más específicamente, en el desarrollo de una teoría matemática las pruebas eran usadas para convencernos y convencer a los demás de que un enunciado considerado tenía que ser aceptado como verdadero una vez que algunos otros enunciados habían sido aceptados como tales. Ninguna restricción era puesta a los argumentos usados en las pruebas, excepto que ellos tenían que ser intuitivamente convincentes. En un cierto período, sin embargo, una necesidad empezó a hacer falta para subsumir la noción de prueba en un análisis más profundo, que resultaría en una restricción al recurso de la evidencia intuitiva también en este contexto. Esto estaba probablemente relacionado con algunos desarrollos específicos en matemáticas, en particular con el descubrimiento de las geometrías no-euclidianas. El análisis fue desarrollado por lógicos, comenzando por el lógico alemán G. Frege; este análisis guió a la introducción de una nueva noción, la de prueba formal, que resultaría ser un adecuado sustituto y un progreso esencial sobre la vieja noción sicológica.

El primer paso para proveer a una teoría matemática con la noción de prueba formal es la formalización del lenguaje de la teoría en el sentido estudiado previamente en conexión con la definición de verdad. Así, se nos provee de reglas formales sintácticas que en particular nos capacitan para distinguir un enunciado de lo que no es un enunciado, simplemente mirando la configuración de las expresiones. El próximo paso consiste en formular unas pocas reglas de diferente naturaleza, las así llamadas reglas de prueba (o de inferencia). Por estas reglas un enunciado es mirado como directamente derivable de enunciados dados si, hablando en términos generales, su configuración está relacionada con las configuraciones de los enunciados dados de una manera prescrita. El número de reglas de prueba es pequeño, y su contenido es simple. Justamente como las reglas sintácticas todas ellas tienen un carácter formal, esto es, ellas se refieren exclusivamente a la configuración de los enunciados considerados. Intuitivamente todas las reglas de derivación parecen ser infalibles, en el sentido de que si un enunciado es directamente derivable de enunciados verdaderos por cualquiera de estas reglas debe ser verdadero él mismo. De hecho la infalibilidad de las reglas de prueba puede ser establecida sobre la base de una adecuada definición de verdad. El más conocido y más importante ejemplo de una regla de prueba es la regla de cortadura, conocida también como *modus ponens.* Por esta regla (que en algunas teorías sirve como la única regla de prueba) un enunciado »q« es directamente derivable de dos enunciados si uno de ellos es el enunciado condicional »si p, entonces q« mientras que el otro es »p«; aquí »p« y »q« son, como es usual, abreviaciones de cualesquiera dos enunciados de nuestro lenguaje formalizado. Podemos ahora explicar en qué consiste una prueba formal de un enunciado dado. Primero, aplicamos las reglas de prueba a los axiomas y obtenemos nuevos enunciados que son directamente derivables de los axiomas; en seguida, aplicamos las mismas reglas a nuevos enunciados o conjuntamente a nuevos enunciados y axiomas y obtenemos más enunciados; y continuamos este proceso. Si después de un número finito de pasos llegamos a un enunciado dado, decimos que el enunciado ha sido formalmente probado. Esto también puede ser expresado más precisamente del modo siguiente: una prueba formal de un enunciado dado consiste en construir una sucesión finita de enunciados tal que 1° el primer enunciado en la sucesión es un axioma, 2° cada uno de los siguientes enunciados o bien es un axioma o es directamente derivable de alguno de los enunciados que lo preceden en la sucesión, por virtud de una de las reglas de prueba y 3° el último enunciado en la sucesión es el enunciado que va a ser probado. Cambiando un poco el uso del término »prueba« podemos aún decir que una prueba formal de un enunciado es simplemente cualquier sucesión finita de enunciados con las tres propiedades recién anotadas.

Una teoría axiomática cuyo lenguaje ha sido formalizado y para la cual le ha sido proporcionada la noción de prueba, es llamada una teoría formalizada. Estipularemos que las únicas pruebas que pueden ser usadas en una teoría formalizada son pruebas formales; ningún enunciado puede ser aceptado como teorema a menos que aparezca en la lista de axiomas o se pueda encontrar para él una prueba formal. Es en principio muy elemental el método de presentar una teoría formalizada en cada etapa de su desarrollo. Ponemos primero los axiomas en la lista y luego todos los teoremas conocidos en un orden tal que todo enunciado de la lista que no es un axioma pueda ser directamente reconocido como un teorema, simplemente comparando su configuración con la configuración de los enunciados que lo preceden en la lista; no está involucrado aquí ningún complejo procedimiento de razonamiento y convencimiento (no hablo aquí de un proceso sicológico por medio del cual los teoremas han sido realmente descubiertos). El recurso a la evidencia intuitiva ha sido, en verdad, considerablemente restringida; las dudas con respecto a la verdad de los teoremas no han sido enteramente eliminadas: pero han sido reducidas a posibles dudas concernientes a la verdad de los pocos enunciados apuntados como axiomas y a la infalibilidad de las pocas y simples reglas de prueba. Puede agregarse que el proceso de introducir nuevos términos en el lenguaje de una teoría puede también ser formalizado proporcionando reglas formales especiales de definición.

Se sabe ahora que todas las disciplinas matemáticas existentes pueden ser presentadas como teorías formalizadas. Las pruebas formales pueden ser proporcionadas para los teoremas matemáticos más profundos y más complicados que fueron originalmente establecidos por argumentos intuitivos.

La relación entre verdad y prueba

Fue indudablemente un gran logro de la lógica moderna el haber reemplazado la vieja noción sicológica de prueba, que difícilmente podría haber sido hecha clara y precisa, por una nueva y simple noción de un carácter puramente formal. Pero el triunfo del método formal llevaba consigo el germen de un futuro revés. Como veremos precisamente la simplicidad de esta nueva noción resultó ser su Talón de Aquiles.

Para ver el alcance de la noción de prueba formal tenemos que clarificar su relación con la noción de verdad. Después de todo, la prueba formal justamente como la vieja prueba intuitiva, es un procedimiento que aspira a adquirir nuevos enunciados verdaderos. Tal procedimiento será adecuado sólo si todos los enunciados adquiridos con su ayuda resultan ser verdaderos y todos los enunciados verdaderos pueden ser adquiridos con su ayuda. Entonces el problema que naturalmente surge es: ¿es realmente la prueba formal un adecuado procedimiento para adquirir la verdad? En otras palabras, ¿coincide el conjunto de todos los enunciados que tienen una prueba (formal) con el conjunto de todos los enunciados verdaderos?

Para ser específico, referimos este problema a una disciplina matemática particular, muy elemental, a saber, la aritmética de los números naturales (la elemental teoría de números). Suponemos que esta disciplina ha sido presentada como una teoría formalizada. El vocabulario de la teoría es magro. Consiste de hecho de variables tales como »m«, »n«, »p«,... que representan números naturales arbitrarios; de los numerales »0«, »1«, »2«, ... que denotan números particulares, de símbolos que denotan algunas relaciones familiares entre números y operaciones sobre números tales como »=«, »<«, »+«, »−«; y, finalmente, de ciertos términos lógicos, a saber, conectivas enunciativas (»y«, »o«, »si... entonces«, »no«) y cuantificadores (expresiones de la forma »para todo número m« y »para algún número m«). Las reglas sintácticas y las reglas de prueba son simples. Cuando hablamos de enunciados en el estudio subsecuente, siempre tendremos en mente enunciados del lenguaje formalizado de la aritmética.

Sabemos, gracias a las consideraciones acerca de la verdad de la primera sección que, tomando este lenguaje como el lenguaje-objeto, podemos construir un apropiado metalenguaje y formular en él una adecuada definición de verdad. Resulta conveniente en este contexto decir que lo que hemos así definido es el conjunto de los enunciados verdaderos: en efecto, la definición de verdad propone que una cierta condición formulada en el metalenguaje es satisfecha por todos los elementos de este conjunto (esto es, todos los enunciados verdaderos) y sólo por estos elementos. Aún más fácilmente, podemos definir en el metalenguaje el conjunto de los enunciados demostrables; la definición se conforma enteramente con la explicación de la noción de prueba formal que fue dada en la segunda sección. Estrictamente hablando, la definición de verdad y de demostrabilidad pertenecen a una nueva teoría formulada en el metalenguaje, y específicamente diseñada para el estudio de nuestra aritmética formalizada y su lenguaje. La nueva teoría es llamada la metateoría o, más especificamente, la metaaritmética. No elaboraremos aquí sobre el modo por el cual la metateoría es construida, o sobre sus axiomas, términos indefinidos, etc. Sólo apuntamos, que está dentro del dominio de esta metateoría que formulamos, y solucionamos el problema de si el conjunto de los enunciados demostrables coincide con el de los enunciados verdaderos.

La solución del problema resulta ser negativa. Daremos aquí un informe muy tosco del método por el cual la solución ha sido alcanzada. La idea principal está estrechamente relacionada con una usada por el lógico americano contemporáneo (de origen austríaco) Kurt Gödel en su famoso artículo sobre la incompletitud de la aritmética.

Se ha apuntado en la primera sección de que el metalenguaje que nos capacita para definir y estudiar la noción de verdad debe ser rico. Contiene entero el lenguaje-objeto como parte y, por lo tanto, podemos hablar en él de los números naturales, conjuntos de números y así sucesivamente. Pero también contiene términos necesarios para el estudio del lenguaje-objeto y sus componentes; por lo tanto, podemos hablar en el metalenguaje de expresiones y, en particular, de enunciados, de conjuntos de enunciados, de relaciones entre enunciados y así sucesivamente. Por lo tanto, en la metateoría podemos estudiar propiedades de estas varias clases de objetos y establecer conexiones entre ellas.

En particular, usando la descripción de enunciados proporcionados por las reglas sintácticas del lenguaje-objeto, es fácil ordenar todos los enunciados (desde las más simples hasta los más y más complicados), en una sucesión infinita y numerarlos consecutivamente. Así, correlacionamos con todo enunciado un número natural de tal modo que dos números correlacionados con dos enunciados diferentes son siempre diferentes, en otras palabras, establecemos una correspondencia uno a uno entre enunciados y números. Esto, a su vez, nos lleva a una correspondencia similar entre conjuntos de enunciados y conjuntos de números, o relaciones entre enunciados y relaciones entre números. En particular podemos considerar números de enunciados demostrables y números de enunciados verdaderos: los llamaremos brevemente números demostrables * y números verdaderos *. Nuestro principal problema es reducido entonces a la pregunta: ¿son los conjuntos de números demostrables * y números verdaderos * idénticos?

Para responder esta pregunta negativamente es suficiente, por supuesto, indicar una propiedad singular que se aplica a un conjunto; pero no a otro. La propiedad que actualmente exhibiremos puede parecer más bien inesperada, una clase de *Deus ex Machina.*

La simplicidad intrínseca de las nociones de prueba formal y demostrabilidad formal va a desempeñar aquí un papel básico. Hemos visto en la segunda sección que el significado de estas nociones es explicado esencialmente en términos de ciertas simples relaciones entre enunciados, prescritos por unas pocas reglas de prueba; el lector puede recordar aquí la regla del *modus ponens.* Las correspondientes relaciones entre números de enunciados son igualmente simples; resulta que ellas pueden ser caracterizadas en términos de las más simples operaciones y relaciones aritméticas, tales cómo adición, multiplicación e igualdad, o sea, en términos que aparecen en nuestra teoría aritmética. Como consecuencia el conjunto de números demostrables * puede también ser caracterizado en tales términos. Uno puede describir brevemente lo que ha sido logrado, diciendo que la definición de demostrabilidad ha sido traducida desde el metalenguaje al lenguaje-objeto.

Por otra parte, el estudio de la noción de verdad en los lenguajes ordinarios sugiere fuertemente la conjetura de que ninguna traducción puede ser obtenida de la definición de verdad; de otro modo, el lenguaje-objeto probaría ser en un sentido semánticamente universal y una reaparición de la antinomia del mentiroso, podría ser inminente. Confirmamos esta conjetura mostrando que, si el conjunto de los números verdaderos * podría ser definido en el lenguaje de la aritmética, la antinomia del mentiroso podría de hecho ser reconstruida en este lenguaje. Puesto que, sin embargo, estamos tratando ahora con un lenguaje formalizado restringido, la antinomia podría asumir una más compleja y sofisticada forma. En particular ninguna expresión con un contenido empírico tal como »el enunciado impreso en tal y tal lugar«, que desempeñó una parte esencial en la formulación original de la antinomia, podía aparecer en la nueva formulación. No entraremos aquí en mayores detalles.

Así, el conjunto de los números demostrables * no coincide con el conjunto de los números verdaderos *, puesto que el primero es definible en el lenguaje de la aritmética, mientras que el último no. En consecuencia, el conjunto de los enunciados demostrables y el de los enunciados verdaderos tampoco coinciden. Por otra parte, usando la definición de verdad fácilmente mostramos que todos los axiomas de la aritmética son verdaderos y que las reglas de prueba son infalibles. Luego, todos los enunciados demostrables son verdaderos, por lo tanto, lo recíproco no vale. Así, nuestra conclusión final es: hay enunciados formulados en el lenguaje de la aritmética que son verdaderos pero no pueden ser demostrados sobre la base de los axiomas y las reglas de prueba aceptadas en la aritmética.

Uno puede pensar que la conclusión depende de axiomas y reglas de inferencia específicos elegidos para nuestra teoría aritmética, y que la conclusión final del estudio podría ser diferente si enriquecemos apropiadamente la teoría agregando nuevos axiomas o nuevas reglas de inferencia. Un análisis más estricto muestra, sin embargo, que el argumento depende muy poco de las propiedades específicas de la teoría estudiada y que ella se extiende de hecho a la mayoría de las otras teorías formalizadas. Suponiendo que una teoría incluye la aritmética de los números naturales como una parte (o que, por lo menos, la aritmética puede ser reconstruida en ella), podemos repetir la porción esencial de nuestro argumento en una forma prácticamente sin cambios; si, concluimos otra vez, que el conjunto de los enunciados demostrables de la teoría es diferente del conjunto de sus enunciados verdaderos. Si, más aún podemos mostrar (como es el caso frecuentemente) que todos los axiomas de la teoría son verdaderos y que todas las reglas de inferencia son infalibles, concluimos que hay enunciados verdaderos de la teoría que no son demostrables. Aparte de algunas teorías fragmentarias con medios de expresión restringidos. La suposición concerniente a la relación de la teoría con la aritmética de los números naturales es generalmente satisfecha y, por lo tanto, nuestras conclusiones tienen un carácter casi universal. (Considerando aquellas teorías fragmentarias que no incluyen la aritmética de los números naturales, sus lenguajes pueden no estar provistos con suficientes medios para definir la noción de demostrabilidad y sus enunciados demostrables pueden, en efecto, coincidir con sus enunciados verdaderos. La geometría elemental y el álgebra elemental de números reales son las más conocidas y quizás los más importantes ejemplos de teorías en las cuales estas nociones coinciden).

La parte dominante jugada en la totalidad del argumento por la antinomia del mentiroso arroja alguna interesante luz sobre nuestras tempranas observaciones concernientes al papel de las antinomias en la historia del pensamiento humano. La antinomia del mentiroso surgió primero en nuestro estudio como una especie de fuerza maligna con un gran poder destructivo. Nos obligó a abandonar todos los intentos de clarificar la noción de verdad para los lenguajes naturales. Tuvimos que restringir nuestras búsquedas a los lenguajes formalizados del discurso científico. Como una salvaguarda contra una posible reaparición de la antinomia tuvimos que complicar considerablemente el estudio para distinguir entre un lenguaje y su metalenguaje. Subsecuentemente, sin embargo, en el nuevo y restringido marco, hemos logrado domar la energía destructiva y enjaezarla para pacificarla con propósitos constructivos. La antinomia no ha reaparecido, pero su idea básica ha sido usada para establecer un significativo resultado metalógico con implicaciones de largo alcance.

Nada es detractado de la significación de este resultado por el hecho de que sus implicaciones filosóficas son esencialmente de carácter negativo. El resultado muestra, en verdad, que en ningún dominio de las matemáticas es la noción de demostrabilidad un sustituto perfecto de la noción de verdad. La creencia de que la prueba formal puede servir como un adecuado instrumento para establecer la verdad de todas las afirmaciones matemáticas, ha probado ser infundado. El triunfo original de los métodos formales ha sido seguido por un serio fracaso.

Cualquier cosa que pueda ser dicha para concluir este estudio está obligado a ser un anti-clímax. La noción de verdad para teorías formalizadas puede ahora ser introducida por medio de una precisa y adecuada definición. Puede, por lo tanto, ser usada sin restricciones ni reservas en el estudio metalógico; ha llegado a ser de hecho una básica noción metalógica envuelta en importantes problemas y resultados. Por otra parte, la noción de prueba tampoco ha perdido su significación. La prueba es aún el único método usado para afirmar la verdad de enunciados dentro de cualquier teoría matemática específica. Estamos ahora conscientes del hecho de que, sin embargo, hay enunciados formulados en el lenguaje de la teoría que son verdaderos, pero no demostrables, y no podemos descontar la posibilidad de que tales enunciados estén entre aquellos que estamos interesados y aquellos que intentamos probar. Por lo tanto, en algunas situaciones podemos desear explorar la posibilidad de ampliar el conjunto de los enunciados demostrables. Para este fin enriquecemos la teoría dada incluyendo nuevos enunciados en su sistema de axiomas o proporcionándole nuevas reglas de prueba. Al proceder así usaremos la noción de verdad como guía; porque no deseamos agregar un nuevo axioma o una nueva regla de prueba si tenemos alguna razón para creer que el nuevo axioma no es un enunciado verdadero, o que la nueva regla de prueba cuando se aplica a enunciados verdaderos puede producir un enunciado falso. El proceso de extender una teoría puede, por supuesto, ser repetido arbitrariamente muchas veces. La noción de un enunciado verdadero funciona, así como un límite ideal que nunca puede ser alcanzado; pero al cual tratamos de aproximarnos ampliando gradualmente el conjunto de los enunciados demostrables. (Pero parece probable, aunque por diferentes razones, que la noción de verdad desempeña un papel análogo en el dominio del conocimiento empírico). No hay conflicto entre las nociones de verdad y prueba en el desarrollo de las matemáticas; las dos nociones no están en guerra, sino que viven en coexistencia pacífica.

ALFRED TARSKI

Traducción: Celso López
Universidad de Chile. Sede Norte.