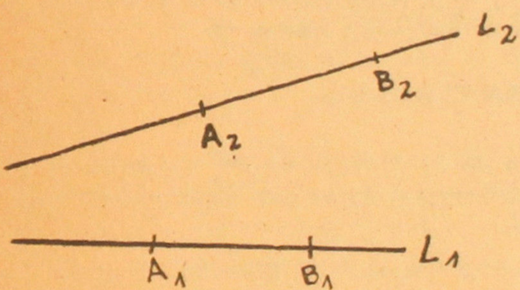
Estudio de Cédulas del Bachillerato de Matemáticas

Por E. FROEMEL y C. VIDELA

PRIMERA CEDULA

1. Se dan dos rectas L_1 y L_2 que se cortan. En L_1 se da el trazo $A_1 B_1$ y en L_2 el trazo $A_2 B_2 = A_1 B_1$. Se pide encontrar un punto C tal que el triángulo $A_1 B_1 C$ sea congruente con el triángulo $A_2 B_2 C$.

Solución. Sean L_1 y L_2 las rectas dadas. Sea C el punto pedido. Si $C A_1 = C A_2$, un lugar geométrico para C es la simetral de $A_1 A_2$; como entonces también debe ser $C B_1 = C B_2$ otro lugar geométrico es la simetral de $B_1 B_2$. Si $C A_1 = C B_2$ se tendrá también $C B_1 = C A_2$ y las simetrales de $A_1 B_2$ y de $A_2 B_2$ determinan C.



En general, tiene entonces el problema dos soluciones. Si dos simetrales para determinar C son paralelas, son a la vez coincidentes, pues esto trales para determinar C son paralelas, son a la vez coincidentes, pues esto exige que $A_1 A_2 \parallel B_1 B_2$ o que $A_1 B_2$ y $\parallel A_2 B_1$ y esas simetrales lo son de las bases de un trapecio isósceles. El problema tiene en este caso infinitas soluciones.

Observación. Como dos triángulos congruentes tienen alturas homólogas iguales, C debe encontrarse en una bisectriz de los ángulos formados por L_1 y L_2. Podrá usarse esta bisectriz en lugar de una de las simetrales; en este caso es importante hacer la demostración.

2. Resuelva con respecto a x y sin eliminar los denominadores, la siguiente ecuación:

$$\frac{3ab - 7x}{4ab} + \frac{bc + 5x}{6bc} = \frac{11ca - 2x}{12ca}$$

Solución: Puede escribirse:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} - \frac{7x}{4ab} + \frac{5x}{6bc} = \frac{11}{12} - \frac{x}{6ca}$$

y como $\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$, tendremos:

$$\frac{5x}{6bc} - \frac{7x}{4ab} = - \frac{x}{6ca}$$, que se

satisface para x = O.

La ecuación anterior no se reduce a una identidad porque en el primer miembro hay un factor que no figura en el segundo. Es, pues, una ecuación de primer grado, cuya única solución es x= O.

3. Transformar en la expresión más sencilla que pueda la siguiente:

$$(a + b - c - d)^4 - (c + d - a - b)^4$$

Solución: Si $a + b = c + d$, ambas bases de las potencias valen O y la expresión vale O. Si $a + b \neq c + d$, ambas bases difieren en el signo, pero tienen el mismo valor absoluto; las cuartas potencias deben, pues, ser iguales y la diferencia de ellas vale O. La expresión es siempre igual a O.

Observación. Si no se reparase pronto en la relación de las bases, podría obtenerse luego también el resultado considerando que la diferencia de dos cuartas potencias es divisible por la suma de las bases y entonces la expresión se descompone en factores de los cuales uno es O.

SEGUNDA CEDULA

1. Un paralelógramo ABCD gira en su plano y en 30° en torno de su centro. Si A′ es la nueva posición del vértice A, se pide determinar cuánto vale AA′ en función de la diagonal e.

Solución. Sea E el centro del paralelógramo; el problema se reduce a determinar el lado AA′ del triángulo isósceles AEA′ en que el ángulo AEA′ es de 30° y el lado AE = e/2. Bajemos la perpendicular AF al lado EA′; como el triángulo AEF tiene el ángulo en E de 30°, el ángulo EAF será de 60°, luego $EF = 1/2\ AE\sqrt{3} = e/4\sqrt{3}$. Aplicando el teorema general de Pitágoras se tiene:

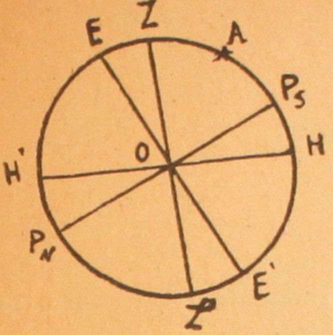
$$AA'^2 = 2(e/2)^2 - 2 \cdot e/2 \cdot e/4\sqrt{3} = e^2/4\ (2 - \sqrt{3})$$ y, finalmente,

$$AA' = e/2\ \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Nótese que AA′ es el lado del dodecágono regular inscrito en la circunferencia de radio EA = e/2. Lo que se ha hecho es obtener de un modo directo la expresión del lado en función del radio o del diámetro.

2. Una estrella se observa en Santiago, en el momento de su culminación superior, con una distancia cenital de 11°. La latitud de Santiago es 33°. Se pide: a) La declinación de la estrella y b) La distancia cenital que tiene, en el mismo momento, para un observador que está, también en el meridiano de Santiago, pero en la latitud de 40° Sur. Discuta.

Solución. Sea el círculo Z'HZ el meridiano celeste de Santiago; A la estrella, H'H la traza del horizonte de Santiago en el plano meridional y OZ la vertical. El ángulo AOZ es de 11º. Como la altura del polo celeste es igual, a la latitud del lugar, $\sphericalangle$ Ps OH = 33º y E E' $\perp$ OPs en O es la traza del ecuador celeste en el plano meridiano. La declinación δ de A es el ángulo AOE y $\sphericalangle$ AOE = EOZ + ZOA; $\sphericalangle$ EOZ = Ps OH = 33º, pues los lados del ángulo EOZ son perpendiculares a los de PsOH y son ambos agudos. Resulta $\sphericalangle$ δ=33º + 11º = 44º.



Para la latitud φ = 40º, Ps OH = 40º y EE' es perpendicular a la nueva dirección OPs. Como la declinación δ = 44º de la estrella es constante, el ángulo AEO es siempre de 44º y puesto que el ángulo EOZ es ahora de 40º, la distancia cenital AOZ será de 4º.

Discusión. Aquí se ha supuesto la culminación superior de la estrella al Sur del cenit. Como en el enunciado no se precisa, puede ocurrir también al norte del cenit, en la posición A' con la misma distancia cenital de 11º. Se tiene entonces $\sphericalangle$ A'OE = EOZ –ZO A y δ = 33º – 11º = 22º.

La distancia cenital para el otro observador será 40º – 23º = 17º.

TERCERA CEDULA

1. Dado un punto A, se pide establecer el lugar geométrico de los puntos simétricos de A con respecto a todas las rectas que pasan por otro punto dado M.

Solución. Sea ML una recta trazada por M. AE$\perp$ML y EA' = EA estando, además, EA' en la prolongación de AE, de modo que A' es el punto simétrico de A. Si la recta L varía, pasando siempre por M, el lugar geométrico de E es la circunferencia de diámetro MA, ya que el ángulo en E es siempre recto. Como AA' = 2 AE, el lugar de A' será la circunferencia homotética de la anterior, con centro de homotecia en A y con razón de homotecia igual a 2. Esta es la circunferencia de centro M y radio MA. También puede obtenerse este lugar geométrico por la siguiente consideración. Si A' es el simétrico de A con respecto a una cualquiera de las rectas trazadas por M, esta recta es simetral de AA' y debe ser entonces MA' = MA, luego el lugar geométrico de A' es la circunferencia de centro M y radio MA.

Observación. El problema entendido como de geometría del plano puede plantearse como de geometría del espacio y no hay mayor dificultad ni modificación sustancial de su tratamiento.

2. Resuelva el sistema:

$$5^{2y} - 2^{4+3x} = 497$$
$$5^{2+2y} + 3^{z} = 15656$$
$$2^{3x} + 3^{1+z} = 89$$

Se puede escribir:

$$5^{2y} - 16\cdot 2^{3x} = 497$$
$$25\cdot 5^{2y} + 3^{z} = 15652$$
$$2^{3x} + 3\cdot 3^{z} = 89$$

de modo que puede elegirse como incógnitas auxiliares 5^{2y} 2^{3x} y 3^{z} Cada ecuación contiene dos de ellas. Eliminaremos, por ej. 3^{z}, multiplicando la segunda ecuación por 3 y restándole la tercera; resulta:

$$75 \cdot 5^{2y} - 2^{3x} = 46867$$

que se combina con la primera para formar el sistema:

$$75 \cdot 5^{2y} - 2^{3x} = 46867$$

$$5^{2y} - 16 \cdot 3^{3x} = 497$$

Multiplicando la primera de éstas por 16 y restando la segunda, se obtiene $1199 \cdot {}^{2}5^{y} = 749375$ * de donde $5^{2y} = 625$; y por consiguiente, $3^{y} = 4$; $y = 2$

Al sustituir $5^{2y} = 625$ en la primera de las ecuaciones propuestas, tenemos.

$$625 - 16 \cdot 2^{3x} = 497 \quad \text{de donde} \quad 2^{3x} = 8, \quad 3^{x} = 3 \quad , \text{y} \quad x = 1$$

Sustituyendo 2^{3x} en la última, se tiene:

$$8 + 3 \cdot 3^{z} = 89$$

$$3^{z} = 27$$

$$z = 3$$

El sistema tiene la solución:

$$x = 1 \; ; \; y = 2 \; ; \; Z = 3$$

CUARTA CEDULA

1. Un triángulo rectángulo está inscrito en una semicircunferencia. Calcule el volumen engendrado, por los segmentos circulares que el triángulo determina en el semi-círculo cuando la figura gira en 180° en torno de la hipotenusa del triángulo expresándolo en función de las proyecciones p y q de los catetos en la hipotenusa.

Solución. Cuando la figura gira en 180° en torno de la hipotenusa, el semi-círculo engendra una semiesfera y cada uno de los triángulos parciales determinados por la altura del triángulo, un semi-cono en que esta altura es radio basal y los segmentos p y q las respectivas alturas. El volumen de la semi-esfera y el de la suma de los dos semi-conos.

El volumen de la semi-esfera es

$$\frac{2}{3} \pi \left(\frac{p+q}{2} \right)^{3} = \frac{1}{12} \pi (p+q)^{3}$$

La suma de los dos semi-conos tiene por volumen $\frac{1}{6} \pi h^{2} (p+q)$

* 5^{2y}

y como $h^2 = pq$, tendremos; suma de los dos semi-conos $\frac{1}{6}\pi pq\ (p+q)$

El volumen pedido es, entonces $\frac{1}{12}\pi\ (p+q)^3 \frac{1}{6}\pi pq\ (p+q)$ o sea

$$\frac{1}{12}\pi\ (p+q)\ ([p+q)^2 - 2pq] = \frac{1}{12}\pi\ (p+q)\ (p^2+q^2)$$

2. Dos capitales suman 100.000 y están colocados, el primero al 3% y el segundo al 4% de interés anual. En dos años, a interés simple, producen, en total \$ 7.500. Determine los dos capitales. Analice el problema si no conoce las tasas de interés y solamente sabe que ellas son dos números que se diferencian en una unidad.

Solución. Sea \$ x el primer capital, entonces el segundo es 100.000–x. El interés anual del primero es 0,03x y el del segundo ; 0,04 (100.000–x). En los dos años producen juntos 0,06x + 0,08 (100.000–x) y se tiene así la ecuación: 0,06x + 0,08 (100.000–x) = 7500 de donde resulta x = 25.000. Los capitales son: \$ 25.000 y \$ 75.000.

Si las tasas son desconocidas y difieren en una unidad, sean p y p+1. El problema puede tratarse en la misma forma: tenemos primero,

$$\frac{2xp}{100} + \frac{2\ (100000 - x)\ (p + 1)}{100} = 7500$$

y luego,

$$2px - 2\ (p+1)x = 750000 - 200000\ (p+1)$$
$$x = 100000\ p - 275000$$

Los capitales son:

100000p – 275000 y 375000 – 100000p y para que ambos sean positivos deberá tenerse: $2{,}75 < p < 3{,}75$.