

CÁLCULO DE VIGAS CONTÍNUAS

POR EL MÉTODO DE LAS LÍNEAS DE INFLUENCIA

POR

RÉGULO ANGUITA G.

El tema que encabeza estas líneas, bien conocido ya de los profesionales, es fácil y expedito para el cálculo de puentes metálicos cuando se dispone de tablas calculadas previamente como las de Cart i Portes.

El objeto del presente trabajo no es otro que el de señalar brevemente cómo han sido aprovechadas esas tablas en un caso práctico, el cálculo de un puente metálico sobre el Maipo en Los Morros.

Aunque un poco desligada del objeto principal, creo necesario, sin embargo, exponer sumariamente tanto para los momentos como para los esfuerzos de corte, la teoría de las vigas continuas aplicada al caso de tres tramos, a fin de deducir de ellas conclusiones importantes. I para no complicar inútilmente el problema, se supondrá solamente la luz del tramo central, distinta de las otras dos que es el caso que se presenta casi siempre en la práctica.

MOMENTOS

Sean l_1 i l_2 fig. (1) las luces de los tramos; 0, 1, 2 i 3 los apoyos i M_1 i M_2 los momentos en los apoyos 1 i 2.

Busquemos la expresión analítica de M_1 i M_2 para las tres posiciones que puede ocupar una fuerza concentrada P sobre la viga.

Supongamos por ejemplo, que P se encuentre en una sección de absisa a sobre el primer tramo fig. (2).

El lugar de momentos para esa posición de P (instantáneo como se le llama generalmente) es 0, q , 1', 2', 3 según nuestras convenciones (momentos positivos tomados por debajo de la base 03 i negativos hacia arriba).

Los momentos M_1 i M_2 se obtienen aplicando dos veces la ecuación general de tres momentos (*).

(*) Apoyos a nivel.

$$-\frac{1}{l_n} \int_0^{l_n} Mx \, dx + \int_0^{l_{n+1}} M \, dx - \frac{1}{l_{n+1}} \int_0^{l_{n+1}} Mx \, dx = 0$$

a los tramos 1 i 2 i 2 i 3 sucesivamente.

$$-\frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} Mx \, dx + \int_0^{l_2} M \, dx - \frac{1}{l_2} \int_0^{l_2} Mx \, dx = 0$$

Unamos 0 con 1' i 1' con 2. La superficie de momentos del primer tramo, por ejemplo, puede considerarse como la superficie del triángulo 0 q 1' *negativo* i el 0 1' *positivo*, i para el segundo tramo puede hacerse análoga superposicion.

Nótese tambien que $p q$ es el momento que produciria la fuerza P en la seccion a sobre una viga apoyada de luz l ; $p q$ es conocido por lo tanto i podemos designarlo por m . En la ecuacion siguiente se tomará m en valor absoluto solamente. De la fig. (2) resulta:

$$-\frac{1}{l_1} \left\{ \frac{1}{2} M_1 l_1 \times \frac{2}{3} l_1 - \frac{1}{2} m \cdot a \cdot \frac{2}{3} a - \frac{1}{2} m \cdot b \cdot \left(a + \frac{1}{3} b \right) \right\} + \frac{1}{2} M_1 l_1$$

$$- \frac{1}{2} M_2 l_2 - \frac{1}{l_2} \left(\frac{1}{2} M_1 l_2 \times \frac{1}{3} l_2 - \frac{1}{2} M_2 l_2 \times \frac{2}{3} l_2 \right) = 0$$

Si se recuerda que:

$$a + b = l_1$$

i por lo tanto:

$$\frac{m}{l_1} \{ 2a^2 + b(3a + b) \} = m(a + l_1)$$

i simplificando convenientemente, se obtiene:

$$2M_1 (l_1 + l_2) - M_2 l_2 = m (a + l_1) \quad (1)$$

Ecuacion de que se desprende desde luego que el signo $(-)$ atribuido a M_2 estuvo bien elegido.

Resulta también el signo de M_2 en la ecuación (1) si al evaluar las integrales en el tramo 2 se atribuye a M_2 signo desconocido afectando los productos en que él interviene con el signo (+).

La aplicación de la ecuación general a los tramos 2 i 3.

$$-\frac{1}{l_2} \int_0^{l_2} M_x dx + \int_0^{l_3} M dx - \frac{1}{l_2} \int_0^{l_2} M_x dx = 0$$

en la misma forma que para 1 i 2 da:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{l_2} \left\{ \frac{1}{2} M_1 l_2 \times \frac{1}{3} l_2 - \frac{1}{2} M_2 l_2 \times \frac{2}{3} l_2 \right\} \\ & - \frac{1}{2} M_2 l_1 + \frac{1}{l_1} \times \frac{1}{2} M_2 l_1 \times \frac{1}{3} l_1 = 0 \end{aligned}$$

Simplificando esta ecuación se tiene:

$$M_1 l_2 - 2M_2 (l_1 + l_2) = 0 \quad (2)$$

I combinando (1) i (2).

$$+ \frac{2(l_1 + l_2)(l_1 + a)}{4(l_1 + l_2)^2 - l_2^2} m$$

$$- \frac{l_2(l_1 + a)}{4(l_1 + l_2)^2 - l_2^2} m$$

O también sustituyendo el valor de m :

$$m = \frac{P}{l_1} a (l_1 - a) \quad (\text{en valor absoluto})$$

$$P \text{ en el primer tramo } \left\{ \begin{aligned} + \frac{P}{l_1} a \frac{2(l_1 + l_2)(l_1^2 - a^2)}{4(l_1 + l_2)^2 - l_2^2} & \quad (3) \\ - \frac{P}{l_1} a \frac{l_1(l_1^2 - a^2)}{4(l_1 + l_2)^2 - l_2^2} & \quad (4) \end{aligned} \right.$$

P en el segundo tramo fig. (3).—Aplicando la fórmula general de Clapeyron dos veces como se ha hecho para el primer tramo se encuentra:

$$+ \frac{P}{l_2} a \frac{(l_2 - a) \{ 2(l_1 + l_2)(4l_2 + a) - l_2(l_2 + a) \}}{4(l_1 + l_2)^2 - l_2^2} \quad (5)$$

$$+ \frac{P}{l_2} a \frac{(l_2 - a) \{ 2 (l_1 + l_2) (l_2 + a) - l_2 (4 l_2 + a) \}}{4 (l_1 + l_2)^2 - l_2^2} \quad (6)$$

En el tercer tramo fig. (4). — Se pueden obtener también los momentos aplicando la fórmula general como anteriormente.

La igualdad de los tramos 1 i 3 permite sin embargo conocerlos directamente. En efecto en virtud de la simetría M_1 i M_3 son respectivamente iguales a M_2 i M_1 del primer caso. En buenas cuentas la figura (4) es la misma figura (2) invertida; pero como M_1 i M_3 del primer caso están expresados en función de a referida al apoyo o (3 en este caso) para conservar las mismas notaciones se deberá reemplazar a por $l_1 - a$ en las fórmulas (3) i (4).

$$M_1 = \frac{P}{l_1} a \frac{l_2 (l_1 - a) (2 l_1 - a)}{4 (l_1 + l_2)^2 - l_2^2} \quad (7)$$

$$+ \frac{P}{l_1} a \frac{2 (l_1 + l_2) (l_1 - a) (2 l_1 - a)}{4 (l_1 + l_2)^2 - l_2^2} \quad (8)$$

Haciendo $P=1$ en las ecuaciones (3)... a (8) se obtienen (3), (5) i (7) como ecuaciones de la línea de influencia de M_1 i (4), (6) i (8) definen la línea de influencia de M_2 .

La simetría de la viga nos dice además que la línea de influencia de M_2 será idéntica a la de M_1 si se supone invertida esta última figura. Luego conocidas las ordenadas de la línea de influencia de uno de los apoyos es innecesario calcularlos para el otro.

LÍNEAS DE INFLUENCIA DE MOMENTOS EN DIVERSAS SECCIONES DE LA VIGA

En una viga continua AB (fig. 5) con apoyos a nivel, de un número cualquiera de tramos i cargada con fuerzas cualesquiera, el momento M_x en una sección x del tramo n es dado por la fórmula:

$$M_x = M_{n-1} + (M_n - M_{n-1}) \frac{x}{l_n} + M_x^a$$

en que:

M_{n-1} = momento flexionante en el apoyo $n-1$.

M_n = » » » » n .

l_n = luz del tramo n .

M_x^a = momento flexionante en la sección x . Si se supone el tramo n apoyado solamente en n i $n-1$.

Apliquemos esta ecuación al caso sencillo que estudiamos.

I.—La sección x se encuentra en el primer tramo de la viga

En el primer tramo (fig. 6).—La influencia de la carga es distinta según la posi-

ción de P respecto de x , lo que se desprende directamente de la ecuación jeneral de M ,

En efecto M_x^a es distinto para P a la izquierda i para P a la derecha de x .

De la ecuación jeneral resulta:

$$M_x = M_0 + (M_1 - M_0) \frac{x}{l_1} + M_x^a$$

$$M_0 = 0$$

Luego:

$$M_x = M_1 \frac{x}{l_1} + M_x^a$$

I de esta ecuación, para

$$x > a$$

$$M_x^a = -P \frac{a}{l_1} (l_1 - x)$$

luego:

$$M_x = M_1 \frac{x}{l_1} - P \frac{a}{l_1} (l_1 - x) \quad (9)$$

I para

$$x < a$$

$$M_x^a = -P \frac{l_1 - a}{l_1} x$$

$$M_x = M_1 \frac{x}{l_1} - \frac{l_1 - a}{l_1} x \quad (10)$$

P en el segundo tramo.—fig. (7).—Aplicando la ecuación jeneral nuevamente i con $M_x^a = 0$ por cuanto el tramo I no está cargado:

$$M_x = M_1 \frac{x}{l_1} \quad (11)$$

P en el tercer tramo.—fig. (8).—La ecuación jeneral se transforma en:

$$M_x = M_1 \frac{x}{l_1} \quad (12)$$

De la misma manera se obtienen las siguientes ecuaciones para el segundo caso.

II.— *La seccion x se encuentra en el segundo tramo*

P en en el primer tramo.— fig. (9)

$$M_x = M_1 + (M_2 - M_1) \frac{x}{l_2} \quad (13)$$

P en el segundo tramo.— fig. (10), para

$$x > a$$

$$M_x = M_1 + (M_2 - M_1) \frac{x}{l_2} - P \frac{a}{l_2} (l_2 - x) \quad (14)$$

i cuando

$$x < a$$

$$M_x = M_1 + (M_2 - M_1) \frac{x}{l_2} - P \frac{l_2 - a}{l_2} x \quad (15)$$

P en el tercer tramo.— fig. (11)

$$M_x = M_1 + (M_2 - M_1) \frac{x}{l_2} \quad (16)$$

Es inútil deducir las ecuaciones para secciones x en el tercer tramo a causa de la simetría de la viga que exige el trazado de la envolvente de momentos solamente hasta la mitad del segundo tramo.

(Continuará)

